

Pragmalinguistik Band 11

Herausgegeben von
Ulrich Ammon, Hans Bühler und Gerd Simon

Sprechen - Denken - Praxis

Zur Diskussion neuer Antworten auf eine
alte Frage in Praxis, Wissenschaft und Philosophie

Herausgegeben von
Gerd Simon und Erich Straßner

Beltz Verlag · Weinheim und Basel 1979

Kimmerle

Ich frage, was die ontologische Materie sein soll, die Gesetzmäßigkeiten enthält, die ich dann herausholen soll.

Loewer

Ich kann doch z. B. in Rohstoffen, die ich vorfinde, tatsächlich nur - und aus Rohstoffen nur Produkte machen, die die Qualitäten, die in diesen Rohstoffen drin sind, in zweckbestimmter Arbeit zu meinem Nutzen verändern, aber ich kann nicht aus Holz Glas machen. Das heißt, ich muß mich in meinem Arbeitsprozeß wie in meinem Plan nach Qualitäten richten, die tatsächlich in der Materie existent sind, und das ist jetzt ein Beispiel für das, was man Materie nennt.

Kimmerle

Da gehen zwei Sachen nicht ganz zusammen. Natürlich stimmt es, daß ich mit bestimmten Dingen nur bestimmte Dinge machen kann, aber schon die Rede-weise, wie ich das auffasse, daß Materie doch Rohstoff mit bestimmten Qualitäten sei, gibt mir zu denken. Da gehen bestimmte Begrifflichkeiten ein, so z. B. was ist Qualität, was ist denn Kausalität, was sind Gesetze? Hier wird nun ein bestimmter Rahmen von allgemeinen Begriffen schon vorausgesetzt. Es gibt nicht eine Objektivität und eine Subjektivität, oder andersrum: idealistische Subjektivität, aus der dann die Objektivität herauskommt. Es gibt eigentlich nur das Unmittelbare oder die Basis, die Subjekt - Objekt - Beziehung, und ich kann keines von beiden erst einmal weglassen und das eine als Grund des andern setzen, das geht auch nicht, indem ich auf Gesetze oder derartige recurriere.

Ein Faktum wird Faktum erst durch eine Theorie. Vor der Theorie gibt es bestenfalls Lebenszusammenhänge, aber keine Fakten. Auf Fakten beziehe ich mich erst, wenn ich danach frage. Dann muß man einen Rahmen explizieren, und zwar in dem Maße, in dem man versucht, (unstrittige) Fakten zu finden, anhand derer sich die verschiedenen Theorien auseinandersetzen können. Das heißt: die Kritik an Theorien läuft über Fakten. Man greift auf Fakten zurück; man hat nicht erst Fakten und macht dann Theorien, sondern man greift von den Theorien aus auf Fakten zurück, um sie miteinander in Zusammenhang zu bringen.

Dieter Wandschneider:

Formalität und Wahrheit

Das Exaktheitsideal neuzeitlicher Wissenschaft ist heute an den von der modernen Logik entwickelten Standards orientiert, deren leitende Hinsicht als Prinzip der Formalität ausgesprochen werden kann (1). Die bloße Meinung, die als solche ein Privates, ein nur Meiniges ist, hat in der Wissenschaft keinen Ort. Verbindlichkeit kann nur beanspruchen, was wirklich ausgedrückt, als ein Bestimmtes artikuliert ist, was als wohlbestimmte Form in Erscheinung tritt und in diesem Sinne öffentlich ausweisbar ist. Ihre vollendete Gestalt gewinnt Wissenschaft diesem Verständnis zufolge als axiomatisiertes System. Alle relevanten Sätze eines axiomatisch charakterisierten Bereichs sind hier aus wenigen ausgezeichneten Formen unter Anwendung vorab fixierter Regeln formal herleitbar.

Gewiß: Für empirische Wissenschaft muß die vollständige Axiomatisierung in dem Maße ein unerreichbares Ideal bleiben, wie es die definitiv abgeschlossene Theorie in diesem Feld nicht gibt oder nicht geben kann. Anders stellt sich die Situation im Blick auf künstliche Systeme der Mathematik und Logik dar. Hier konnte die Auffassung vertreten werden - man denke an HILBERT -, daß alle Theoreme eines solcherart axiomatisierten Bereichs formal-kalkülmäßig ableitbar sind und darüberhinaus auch die Widerspruchsfreiheit des Systems beweistheoretisch gesichert werden kann.

Wie man weiß, hat dieses unter dem Titel 'Formalismus' bekannte Programm HILBERTs durch Untersuchungen K. GÖDELS eine wesentliche Einschränkung hinsichtlich seiner Durchführbarkeit erfahren. GÖDEL konnte zeigen, daß nicht einmal alle im arithmetischen Formalismus logisch gültigen Sätze formal beweisbar sind und auch die Widerspruchsfreiheit eines solchen Systems nicht mit den Mitteln des Systems selbst nachweisbar ist. Dieses überraschende Resultat GÖDELS hat über die Grenzen der Fachdisziplin Logik hinaus Beachtung gefunden, vor allem in der Philosophie, und in diesem Zusammenhang übrigens auch zu mancherlei Spekulationen Anlaß gegeben.

Die folgenden Überlegungen haben das Ziel, den für GÖDELS Theorem maßgeblichen Sachverhalt herauszuarbeiten. Das Fazit läßt sich in drei Thesen vorwegnehmen: GÖDELS Ausdruck stellt vermöge seiner reflexiven Struktur eine sich selbst erfüllende Aussage dar. Seine Aufklärung fällt daher zweitens nicht, wie ge-

wöhnlich unterstellt wird, in die Kompetenz der Beweistheorie, sondern der Sprachanalyse. Der Nachweis schließlich, daß schon auf formaler Ebene die Prävalenz des Wahrheitsbegriffs für die Logik dargetan werden kann, macht einerseits die Unvermeidlichkeit der Unvollständigkeitsproblematik deutlich. Andererseits wird es so auch möglich, diese auf das Wahrheitsproblem hin zu relativieren. Mit dem hier unternommenen Klärungsversuch ist die Hoffnung verbunden, daß das von GÖDEL entdeckte Phänomen aus unsäglichen technischen Verstrickungen befreit und hinsichtlich seiner Tragweite dadurch zugleich realistischer beurteilt werden kann.

Die Frage nach der Vollständigkeit formaler Systeme ergibt sich aus dem Unterschied von formal beweisbaren Sätzen und logisch wahren Folgerungen, ein Unterschied, der auf der Differenz von Syntax und Semantik beruht: Der formale Beweis führt von axiomatisch vorgegebenen Zeichenfiguren durch die Anwendung von Ableitungsregeln zu neuen Figuren. Der Begriff der logisch wahren Folgerung setzt eine Interpretation der Zeichen voraus und besagt: Jeder Ausdruck, der für alle die Interpretationen wahr ist, für die auch die Axiome wahr sind, ist eine logische Folgerung aus diesen. Er gilt dann unter denselben Bedingungen wie die Axiome.

Im Blick auf die Differenz von Formalität und Wahrheit muß sich zugleich die Frage einer möglichen Beziehung beider Hinsichten stellen. Ein formales System wird in diesem Sinne korrekt genannt, wenn alle beweisbaren Zeichenreihen bei Interpretation zugleich logisch wahre Folgerungen aus den Axiomen sind. Es heißt vollständig, wenn die logisch wahren Folgerungen umgekehrt auch beweisbar sind. GÖDELS überraschendes Ergebnis kann dann so ausgesprochen werden, daß hinlänglich ausdrucksreiche Systeme - solche nämlich, in denen der für das System definierte Beweisbegriff im System selbst formal ausdrückbar ist - wesentlich unvollständig sind: ein Tatbestand, der, wie GÖDEL zeigen konnte, bereits für die elementare Arithmetik gegeben ist.

Die Aussage des Unvollständigkeitstheorems ist durchaus prinzipiell zu verstehen. Zunächst ist die Frage der Beweisbarkeit eine Frage der formalen Möglichkeiten, d.h. der vorgegebenen Axiome und Ableitungsregeln: Stärkere Voraussetzungen ermöglichen auch stärkere Resultate. GÖDELS Theorem markiert indessen eine nicht überschreitbare äußerste Grenze der Beweisbarkeit. Der in ihm konstruierte Satz - nennen wir ihn G - ist prinzipiell, d.h. unabhängig von jedem nur denkbaren Formalisierungsmodus als unbeweisbar und dabei, wie sich gleichwohl zeigen läßt, als wahr erweisbar: Ein höchst merkwürdiges Resultat, das verständlicherweise Beunruhigung auslöste, schien damit doch jenes fundamentale Prinzip moderner Logiktheorie erschüttert, das im Ideal vollständiger Formalisierung seinen prägnanten Aus-

druck findet. Ist das Denken des Logikers, mußte man sich fragen, jedem noch so leistungsfähigen Formalismus in einem grundsätzlichen Sinne überlegen? Gerade diese Vermutung hat zu mancherlei Mythisierungen und Spekulationen Anlaß gegeben. Klarheit über die Bedeutung der GÖDELSchen Entdeckung läßt sich indes nur aus der Einsicht in den hier wirksamen Mechanismus erreichen. Darum wird es im folgenden zu tun sein.

Entscheidend in diesem Zusammenhang ist, wie sich gleich zeigen wird, der Umstand, daß der von GÖDEL konstruierte Satz reflexiv ist, d.h. eine Aussage über sich selbst macht. G behauptet seine eigene Unbeweisbarkeit - eine simple umgangssprachliche Fassung wäre: 'Dieser Satz ist unbeweisbar'. Das GÖDELSche Phänomen, das ist nun die These, ergibt sich allein aus der Reflexivität von G . Eine einfache Überlegung macht dies deutlich:

Betrachten wir zunächst den allgemeinen Fall eines reflexiven Satzes R , der sich selbst das Attribut a zuspricht. Offenbar ist R wahr genau dann, wenn R das sich selbst zugesprochene Attribut tatsächlich besitzt. R ist falsch, wenn ihm das Attribut a nicht zukommt, mit anderen Worten: Wahrheit und Beschaffenheit eines reflexiven Satzes sind notwendig gekoppelt. Der Vergleich mit einem gewöhnlichen, nicht reflexiven Satz N läßt diese Eigentümlichkeit reflexiver Sätze noch prägnanter hervortreten: N ordnet einem von N verschiedenen Gegenstand ein Attribut a zu. Kommt es dem Gegenstand tatsächlich zu, ist N wahr, andernfalls falsch. Völlig offen bleibt dabei, ob etwa N selbst das Attribut a besitzt oder nicht, beides ist ohne Folgen für die Geltung von N möglich: Beschaffenheit und Wahrheitswert einer nicht reflexiven Aussage sind unabhängig voneinander. Anders hingegen im reflexiven Fall. Die im Satz vollzogene Verknüpfung von Bestimmungen, deren tatsächliches Bestehen über die Wahrheit des Satzes entscheidet, bezieht sich hier auf den Satz selbst. Thema seiner Aussage ist seine eigene Beschaffenheit. Seine Wahrheit entscheidet sich so nicht an einem anderen, vom Satz verschiedenen Sachverhalt, sondern an ihm selbst: Ist seine Beschaffenheit derart, daß er das Attribut a besitzt, so ist damit zugleich seine Wahrheit involviert, besitzt er es nicht, seine Falschheit, kurz: Wahrheitswert und Beschaffenheit des Satzes sind hier über die Aussage rückgekoppelt.

Die Anwendung auf den GÖDELSchen Ausdruck ist einfach. G behauptet seine eigene Unbeweisbarkeit, d.h. a ist hier das Attribut 'unbeweisbar (in bezug auf ein vorgegebenes System)'. Die Konsequenz aus den vorangehenden Überlegungen ist die, daß G entweder nur unbeweisbar und wahr oder beweisbar und falsch sein kann. In korrekten Systemen ist der letztere Fall aber ausgeschlossen: Beweisbare Sätze sind hier jedenfalls auch wahr. Mit dieser

Einschränkung bleibt für G nur die für den GÖDELSchen Fall charakteristische Verknüpfung von Wahrheit und Unbeweisbarkeit. Das ist der entscheidende Punkt.

Ist dieser einmal gesehen, lassen sich leicht Parallelfälle konstruieren, die beliebig absurd sein können. Zwei Beispiele zur Illustration:

Statt des GÖDELSchen 'Dieser Satz ist unbeweisbar' läßt sich etwa auch 'Dieser Satz ist noch nicht beweisbar' bilden. Nehmen wir an, er sei beweisbar, so ist er falsch. Kann dieser Fall aus Korrektheitsgründen wieder ausgeschlossen werden, so ergibt sich die absurde Situation eines wahren Satzes, der bis in alle Zukunft 'noch nicht' beweisbar ist und bleibt. Grotesker noch, aber strukturell gleichartig erscheint der Satz 'Dieser Satz ist nicht mehr beweisbar': auch hier eine Zeitbestimmung, die nun freilich eine in der Vergangenheit eingetretene Veränderung hinsichtlich der Beweisbarkeit insinuiert mit der Konsequenz, daß der Satz wahr, aber jetzt und in Zukunft unter keinen Umständen mehr beweisbar ist.

Der hier wirksame Mechanismus ist, denke ich, deutlich geworden: Aufgrund seiner Reflexivität und der dadurch ermöglichten Rückkopplung von Beschaffenheit und Wahrheitswert gewinnt der Satz G (ebenso wie die anderen Beispielsätze) zirkulären Charakter und wird dadurch (bei vorausgesetzter Korrektheit des Systems) zu einer sich selbst erfüllenden Aussage. Man mag derartige Sätze unter konstruktivistischem Gesichtspunkt 'bedeutungslos' nennen (2). Aber das ändert nichts daran, daß diese in ausdrucksreichen Systemen widerspruchsfrei möglich und, wie dargelegt, darüberhinaus gültig sind.

Zugleich ist klar, daß die Reflexivität von G keine nur nebensächliche, beiheerspielende Eigenschaft des Satzes sein kann, wie dies nicht nur GÖDEL selbst (3), sondern auch STEGMÜLLERS Darstellung noch annimmt (4). Dem entspricht, daß das Augenmerk üblicherweise allein technisch-beweistheoretischen Details gilt und der tatsächlich zugrundeliegende Sachverhalt dabei verdeckt und unerkant bleibt (5). Dieser besteht, wie gesagt, in der Zirkularität von G und erklärt (6) so erst die Unabhängigkeit des GÖDELSchen Theorems von jeder spezifischen Wahl der Axiome und des Beweisbegriffs - ein beweistheoretisch sonst unverständlicher Tatbestand. Fazit also: Allem Anschein und landläufigen Verständnis zum Trotz haben wir es nicht mit einem beweistheoretischen, sondern rein sprachanalytisch aufzuklärenden Sachverhalt zu tun, und der wahnwitzige technische Aufwand im Zusammenhang mit GÖDELS Konstruktion trägt eher zur Verschleierung des Problems als zu dessen Klärung bei (7).

Dies ist das eine. Ein anderes ist die Vollständigkeitsfrage in bezug auf ein faktisch vorgegebenes System, die Klärung fordert, ob

der Apparat der Ableitungsregeln zureicht, die Gesamtheit der aus den Axiomen folgerbaren wahren Formeln formal herzuleiten - eine Untersuchung, die selbstverständlich nur beweistheoretisch zu leisten ist und mit der von GÖDEL apostrophierten prinzipiellen Unvollständigkeit nur scheinbar etwas zu tun hat.

Wir habengesehen, daß (inkorrekten Systemen) jede reflexive Unbeweisbarkeitsaussage notwendig wahr und unbeweisbar ist. Offenbar gilt nun auch die Umkehrung, daß jeder wahre und dabei prinzipiell unbeweisbare Satz nur eine reflexive Unbeweisbarkeitsaussage sein kann. Nur für einen solchen Satz sind Wahrheit und Unbeweisbarkeit notwendig verknüpft. Jeder andere Satz nämlich, der keine reflexive Unbeweisbarkeitsaussage enthält (8), kann stets dadurch als wahr und beweisbar bestimmt werden, daß er dem System als neues Axiom hinzugefügt wird (9). Handelt es sich also nicht um eine reflexive Unbeweisbarkeitsaussage, so kann auch der G auszeichnende Charakter prinzipieller Unbeweisbarkeit nicht gegeben sein.

Hierbei ist zu beachten, daß freilich auch G zum Axiom erklärt und dadurch in einen beweisbaren Satz überführt werden kann, beweisbar aber nur in dem durch G erweiterten, nicht im ursprünglichen Axiomensystem, auf das sich die Unbeweisbarkeitsaussage von G bezieht. In dem neuen, durch G erweiterten System ist jedoch erneut eine reflexive Unbeweisbarkeitsaussage möglich, die in diesem System nun wieder wahr und unbeweisbar ist. Das Verfahren, reflexive Unbeweisbarkeitsaussagen selbst zum Axiom zu erklären, kann unendlich fortgesetzt werden, ohne daß ein definitiv vollständiges System erreichbar wäre (10). Das Problem ist so immerfort nur verschoben, nicht gelöst. Die aus der Struktur reflexiver Unbeweisbarkeitsaussagen gewonnene Einsicht zeigt freilich auch, in welcher Weise - sofern daran gelegen ist - eine Korrektur zur Eliminierung der GÖDELSchen Unvollständigkeit anzubringen wäre: Es genügte, axiomatisch festzulegen, daß reflexive Unbeweisbarkeitsaussagen nicht als zulässige Sätze des Systems akzeptiert sind. Wie ein solches (metatheoretisches) Axiom formal auszusehen hätte, kann an dieser Stelle unerörtert bleiben.

Ich wende mich nun gewissen extensiven Schlußfolgerungen zu, die verschiedentlich aus dem GÖDELSchen Unvollständigkeitstheorem gezogen worden sind. In diesem Zusammenhang ist etwa die von Gerhard FREY vertretene Auffassung hinsichtlich einer möglichen Theorie der Reflexion zu nennen, die im folgenden kurz charakterisiert werden soll:

"Wenn es nun eine Theorie der Reflexion geben soll, so müßte diese objektivierbar sein. Die Theorie als ein System von Sätzen müßte also eine Objektsprache sein". Kennzeichnend für Reflexion ist aber, so FREY weiter, die Möglichkeit Aussagen über ob-

jektsprachliche Ausdrücke zu formulieren, mit anderen Worten: Die Reflexion bezeugt sich in metasprachlichen Aussagen über objektsprachliche Gebilde und muß daher beide Ebenen, die objekt- und die metasprachliche, umgreifen." Die Bedingung für eine echte und vollständige Theorie der Reflexion wäre also die, ein System zu finden, in dem der Unterschied von Objekt- und Metasprache aufgehoben ist ... Die Bedingung für eine Theorie der Reflexion wäre also eine formalisierte Sprache, für die nicht zwischen objekt- und metasprachlichen Ausdrücken unterschieden zu werden braucht"(11). Aber, so argumentiert FREY nun, sprachlogische Überlegungen "sagen ebenso wie das GÖDEL-Theorem, daß es nicht möglich ist, ein formales System anzugeben, in dem alle metatheoretischen Aussagen über dieses System in dem System selbst formulierbar sind. Eben das aber war die Forderung, die wir an ein formales System stellen müßten, wenn es eine Theorie der Reflexion sein soll" (12).

In diesen Formulierungen sind einige Ungenauigkeiten enthalten, die ich nur andeute: Es kann z. B. keine Frage sein, ob zwischen objekt- und metasprachlichen Ausdrücken unterschieden werden muß - das gilt offenbar schon für die umgangssprachliche Praxis. Was FREY tatsächlich meint, ist dies, daß beide Ausdruckstypen im Rahmen einer Theorie der Reflexion einander gleichzustellen wären, d. h. auch 'gemischt' verwendbar sein sollten. Ferner: GÖDELS Theorem besagt keineswegs, daß es unmöglich sei, alle metatheoretischen Aussagen über ein System in dem System selbst zu formulieren, sondern vielmehr, daß derartige Formulierungen in der Tat möglich und sogar wahr, jedoch nicht beweisbar sind. Ohne die Formulierbarkeit derartiger metatheoretischer Sätze wäre GÖDELS Fragestellung überhaupt unsinnig. FREY, der an anderer Stelle GÖDELS Verfahren durchaus zutreffend charakterisiert, bemerkt nicht, daß dabei, im Widerspruch zum vorigen, gerade die Möglichkeit einer Vereinigung von Objekt- und Metasprache unterstellt ist (13). Unklar daher die von ihm gezogene Folgerung: "Die oben formulierte Bedingung für eine Theorie der Reflexion ist also unerfüllbar ... Es kann keine explizit formulierte Theorie der Reflexion geben" (14). Auch in anderen Arbeiten von G. FREY finden sich, bis hin zu wörtlichen Übereinstimmungen, ähnliche Formulierungen (15).

Mögen FREYS Überlegungen aufgrund ihrer teilweise inkonsistenten Argumentation theoretisch wenig überzeugend erscheinen, so ist doch einzuräumen, daß hier ein Problem liegt, dessen leitender Gedanke sich wie folgt charakterisieren läßt: Auch und gerade eine Theorie der Reflexion sähe sich dem von GÖDEL entdeckten Problem konfrontiert. Sie wäre gleichfalls formal unvollständig, d. h. gewisse Formen der Selbstbeziehung (reflexive Unbeweisbarkeitsaussagen!) würden ihre formalen Möglichkeiten übersteigen. Dies freilich im Gegensatz zum Selbstverständnis selbstbewußten

Wissens, das den Selbstbezug als ihm wesentliche Möglichkeit begreift. Dem entspricht im übrigen die Behandlung des Unvollständigkeitsproblems durch den Logiker. Daß der von ihm selbst konstruierte Satz G in einem vorgegebenen System nicht beweisbar ist: eben dieser Sachverhalt ist durch das Wissen für das Wissen logisch streng erweisbar, mit anderen Worten: Jede formale oder gar technisch-kybernetische Nachbildung des sich selbst wissenden Denkens wäre offenbar unvermögend, dieses in seinen Leistungen zu erreichen. So etwa die Argumentation von J. R. LUCAS (16), deren Bezugnahme auf das GÖDELtheorem zunächst nicht ohne Plausibilität ist.

Um hier zu einer Klärung zu kommen, muß freilich noch einmal auf die Voraussetzungen zurückgegangen werden. Wesentlich für GÖDELS Problem ist vor allem die Differenz von Wahrheit und Beweisbarkeit bzw. von Semantik und Syntax. Dabei stellt sich die Frage nach dem Sinn dieser Zweigleisigkeit: Ist die semantische Dimension nicht überhaupt entbehrlich? Ist formale Beweisbarkeit nicht schon das Maximum dessen, was Logik streng zu leisten vermag?

Gewiß sind letztlich inhaltliche Motive für die Konstruktion formalisierter Systeme anzunehmen, aber dieser faktische Anlaß ist innerhalb des Systems suspendiert. Nach dem Formalitätsprinzip zählt allein das, was als wohlbestimmte Form explizit in Erscheinung tritt bzw. durch vorab festgelegte Operationen explizierbar ist, genauer: Gehen wir von den im System verfügbaren Zeichen (Alphabet) aus, so ist mit diesen zunächst lediglich die Unterstellung von bestimmter Bestimmtheit, d. h. Bestimmtheit und Wohlunterschiedenheit gegenüber anderen Zeichen, verbunden. Aus den Zeichen sind mit Hilfe von Formationsregeln weiter 'wohlgeformte' Zeichenreihen oder Ausdrücke bildbar, von denen einige dann als Axiom ausgezeichnet werden. Ableitungsregeln schließlich gestatten den Übergang von solchen axiomatisch angenommenen Zeichenreihen zu anderen Zeichenreihen, die so als formale Ableitungen aus den Axiomen erscheinen. Dieses rein formale Operieren mit formalen Ausdrücken bedeutet maximale Kontrolle der hergestellten und herstellbaren Zusammenhänge. In diesem Sinne noch einmal: Wird das, was traditionell Urteil, Wahrheit, Sinn heißt, nicht entbehrlich angesichts der Möglichkeiten rein formalen Operierens? - eine Auffassung übrigens, die vom WIENER KREIS in der Frühzeit des Logischen Positivismus in der Tat engagiert vertreten worden ist, man denke an CARNAP. Wäre ein Problem wie das der Unvollständigkeit formaler Systeme nicht überhaupt vermeidbar, wenn Logik sich von vornherein auf das kalkülmäßige Erzeugen von Zeichenfiguren beschränken und auf den mit der Bestimmung des Urteilssatzes verknüpften Wahrheitsbegriff verzichten würde?

Man pflegt dem gewöhnlich die Einbettung formaler Systeme in die Umgangssprache entgegenzuhalten (17), ihr Ange-wiesensein auf umgangssprachlich gefaßte Formations- und Ab- leitungsregeln - ein Einwand, der natürlich den Kontereinwand provoziert, daß auch derartige Regeln wieder formalisiert oder gar technisch mechanisiert werden können. Nicht ganz primi- tive Maschinen und Computer belegen dies zur Genüge. Die Kri- tik am formalistischen Absolutismus ist darum wirkungsvoller, wenn sie nicht an dessen äußeren Grenzen, die ja - möglicher- weise beliebig - verschiebbar sind, ansetzt, sondern in dessen Zen- trum: Sie enthüllt dort, was Formalität am entschiedensten zu negieren scheint: Urteil und Wahrheit.

Um dies zu verstehen, braucht man sich nur die Rolle der Axiome in formalen Systemen zu vergegenwärtigen: Axiome sind Ausdrücke, denen ein Sonderstatus zukommt, indem sie die spe- zifischen Strukturen eines Systems festlegen. Was heißt das? Axiome sind zunächst einmal Ausdrücke, also Zeichenreihen, Zei- chenkomplexe. Wird mit dem einzelnen Zeichen die Unterstellung von bestimmter Bestimmtheit verbunden (s. o.), so entsprechen Aus- drücken ganz allgemein komplexe Verknüpfungen von Be- stimmtheiten. Werden einige solcher Verknüpfungen nun als Axiom ausgezeichnet, so ist damit offenbar ein Unterschied ge- setzt. Es gibt jetzt zwei Arten von Zeichenverknüpfungen: solche, die mit den Axiomen 'gleichartig' sind, was immer das heißt, und solche, für die das nicht gilt. Die einen entsprechen gewisser- maßen dem Geist der in den Axiomen getätigten Verknüpfungen, die anderen widersprechen ihm. Die im formalen System möglichen Zeichenverknüpfungen können so, über ihre rein syntaktische Zulässigkeit hinaus, auch gültig, wahr, sein oder auch nicht, und dieser inhärente Wahrheitsanspruch begründet den Urteilscharakter von Ausdrücken, der mithin schon im Formalen nachweisbar ist.

Wohlgermerkt: Nicht die in der Verbindung von Zeichen zu komplexeren Ausdrücken getätigte Verknüpfung konstituiert als solche schon den Urteilscharakter, sondern erst die in der Wahl von Axiomen vollzogene Auszeichnung bestimmter derartiger Verknüpfungen gegenüber anderen. Erst diese neue Hinsicht trägt dem Rechnung, was traditionell als 'Zutreffen einer Urteilsver- knüpfung', als 'Geltung' oder 'Wahrheit' gefaßt wird. Axiome sind in diesem Sinne keine gewöhnlichen Ausdrücke, sondern, wie F. WAISMANN treffend bemerkt: "Sie konstituieren vielmehr erst das, was wir den Begriff des Satzes nennen" (18).

Daraus erhellt ein weiteres: Nach dem hier entwickelten Ver- ständnis sind auch formale Ausdrücke, lang gehegten Vorurteilen zum Trotz, bereits im Ansatz auf mögliche Interpretationen

bezogen - solche Interpretationen nämlich, die sich aus der Auszeichnung von Axiomen ergeben, d.h. mit diesen konform sind oder, wie auch gesagt wird, die Axiome wahr machen (19). Nicht eine einzelne bestimmte Interpretation also. Der Interpre- tationsbegriff hat hier allgemeinere Bedeutung und ist dabei am Axiombegriff festgemacht. Man denke an HILBERTs Idee der 'im- pliziten Definition', derzufolge durch die Axiome lediglich ei- ne Interpretationsstruktur, nicht deren inhaltliche Konkreti- sierung festgelegt wird.

Damit nun ist eine Antwort auf die früher formulierte Frage mög- lich. Mit der Auszeichnung von Axiomen ist auch der vor- geblich rein formale Ausdruck in einem Axiomensystem von vorn- herein auf Wahrheit bezogen. Und mit der Definition eines formalen Beweisbegriffs ist daher unvermeidlich die Fra- ge seiner Leistungsfähigkeit im Hinblick auf den Wahrheitsbegriff, ergo das Vollständigkeitsproblem, involviert: die Frage also, ob die im System formalisierten Ab- leitungsoperationen zureichen, alle logisch wahren Folgerungen aus den Axiomen, d.h. alle Sätze, die bei möglichen Interpre- tationen der Axiome zugleich mit diesen wahr sind, rein formal zu beweisen. Die Vollständigkeitsfrage ist so in der Tat unum- gänglich. Sie ist Ausdruck dafür, daß der formale Beweis logisch sekundär gegenüber dem Wahrheitsbegriff bzw. der logischen Folgerung ist (20).

Dieses Ergebnis läßt auch das Unvollständigkeitstheorem in ei- nem neuen Licht erscheinen. Man mag zunächst vermuten, daß die Folgerungsbeziehung stets durch einen geeigneten Ableitungs begriff formal nachgebildet werden kann. Das Interesse an einem solchen Verfahren liegt auf der Hand: Ein Hinausgehen über die unmittelbare formale Gestalt der Ausdrücke erübrigt sich auf diese Weise. Formale Operationen sind mechanisierbar. Sie ersparen den Rück- gang auf konkrete Interpretationen und damit zusammenhängende Komplikationen der Wahrheitsbeziehung. Deren Formalisierbar- keit findet aber dort ihre Grenze, wo Formalität und Wahrheit zu einander ausschließenden Bestimmungen werden, und eben dies ist unvermeidlich dann gegeben, wenn die Wahrheit ei- nes Satzes mit seiner Unbeweisbarkeit koinzidiert wie im Fall des von GÖDEL konstruierten Ausdrucks G. Zugleich ist klar, daß die Logik sich des Problems auch nicht etwa durch Verzicht auf den Wahrheitsbegriff entledigen kann: Sie würde sich damit selbst aufgeben, insofern auch das formale System schon, wie dar- gelegt, immanent auf Wahrheit bezogen ist. Diese Einsicht aber, daß der Wahrheitsbegriff auch auf formaler Ebene als logisch vor- rangig gegenüber formalen Aspekten zu gelten hat, ist zugleich ein entscheidender Schritt zur Entmythisierung des GÖ- DELtheorems.

In der Tat: Das geheimnisumwitterte Phänomen einer gleichsam unhintertreiblichen Unvollständigkeit formaler Systeme ist auf-

grund der vorgetragenen Überlegungen leicht als Vexierspiel zu durchschauen. Die Scheinhaftigkeit und vordergründige Paradoxalität des Problems kann drastisch an einem Beispiel demonstriert werden, das der GÖDELSchen Konstruktion unmittelbar nachgebildet ist: Zu diesem Zweck soll ein Satz 'nicht-axiomisierbar' (im Unterschied zu: 'nicht axiomatisierbar') genannt werden, wenn er, aus welchen Gründen immer, nicht die Funktion eines Axioms übernehmen kann. Nun gibt es offenbar einen Satz, nennen wir ihn I, der in jedem korrekten Axiomensystem wahr und gleichwohl nicht-axiomisierbar ist, der Satz nämlich: 'Dieser Satz ist nicht-axiomisierbar'. Die Parallele zum GÖDELSchen Ausdruck ist deutlich. Ähnlich merkwürdig sind auch die Konsequenzen (21): Nehmen wir zunächst an, der Satz sei axiomisierbar. Er ist dann falsch, als Axiom sollte er aber (bei vorausgesetzter Korrektheit des Systems) wahr sein. Diese Möglichkeit entfällt also, und die verbleibende bedeutet dann, daß I wahr, seine Verwendung als Axiom hingegen ausgeschlossen ist, mehr noch: Die eben formulierte Einschränkung schließt die formale Beweisbarkeit des Satzes keineswegs aus, sofern die Beweisssequenz nicht eingliedrig ist, d. h. im bloßen Anschreiben eines Axioms besteht.

Haben wir damit, wäre zu fragen, einen neuen, rätselhaften Ausdruck entdeckt, der wahr ist, aber prinzipiell nicht Axiom sein kann, ohne andererseits die Möglichkeit formaler Beweisbarkeit auszuschließen? Handelt es sich hier um eine tiefliegende, bislang unentdeckte Eigenschaft von Axiomensystemen? Die Antwort kann nicht zweifelhaft sein: Das Phänomen folgt aus der Struktur des Satzes I selbst. Aufgrund seiner Selbstbezüglichkeit (und der vorausgesetzten Korrektheit des Systems) sind mit seiner Aussage zugleich seine Eigenschaften festgelegt. Nicht anders als der GÖDELSche Ausdruck G stellt I eine sich selbst bewahrheitende Aussage dar. GÖDELS Theorem soll durch den Vergleich keineswegs fraglich gemacht werden, aber zugleich wird deutlich, daß es sich hierbei letztlich um einen vergleichsweise simplen urteilslogischen Zusammenhang handelt.

Was folgt daraus für die zuvor charakterisierte bewußtseinstheoretische Inanspruchnahme des Unvollständigkeits-theorems? Vor allem wohl, daß diese auf falschen Vorstellungen beruht. Jene prinzipielle Unvollständigkeit hinlänglich ausdrucksreicher formaler Systeme erschließt keine obskurante Dimension, kein Residuum des Bewußtseins gegenüber dem Bereich des Formalen, sondern ist lediglich Ausdruck einer sich selber erfüllenden Aussage, für die Wahrheit und Beweisbarkeit in ein Gegensatzverhältnis treten. Dies freilich nicht in einem symmetrischen Sinn, sondern so, daß um der Prävalenz des Wahrheitsbegriffs willen die Eigenschaft der Beweisbarkeit negiert ist. Man kann dies dahin verstehen, daß formal-technische Beweisverfahren disponibel sind, während der Wahrheitsbegriff die schlechthin unantastbare Grundlage logischen Argumentierens bleibt.

Nun scheint der Verdacht nahezuliegen, daß für grundsätzlich jede Form logischen Argumentierens, in deren Rahmen reflexive Aussagen möglich sind, mit 'GÖDELSchen Schwierigkeiten' zu rechnen ist. Ein x-beliebiges Beweisverfahren hat, wie aufgrund der vorherigen Überlegungen klar ist, seine Grenze dort, wo es in ein ausschließendes Verhältnis zur Wahrheit tritt, d. h. im Falle eines Ausdrucks der Art: 'Dieser Satz ist nach dem betreffenden Beweisverfahren in dem betreffenden System unbeweisbar'. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für ein Beweisen, das sich, wie zuvor angenommen, nicht mehr auf spezielle technische Prozeduren, sondern direkt auf den Wahrheitsbegriff stützt? Seine Grenze wäre offenbar in einem reflexiven Satz erreicht, der auch noch seine eigene Wahrheit von sich ausschließt, etwa in Form einer Aussage der Art: 'Dieser Satz ist falsch', die sich un schwer als die klassische Wahrheitsantinomie identifizieren läßt, mit anderen Worten: Auf der basalen Ebene des Wahrheitsbegriffs selbst, auf die logisches Argumentieren in letzter Instanz bezogen bleibt, reduziert sich das GÖDELSche Problem auf das Wahrheitsproblem. Seine Erscheinungsform ist die Wahrheitsantinomie, deren kontradiktorischer Charakter das Pathologische der Konstruktion, ihre Zirkularität also, drastischer hervortreten läßt als die subtilere GÖDELSche Version (22).

Als Mittel der Wahl zur Vermeidung der Wahrheitsantinomie gilt seit TARSKIs klassischen Untersuchungen zum Wahrheitsbegriff die Preisgabe der 'semantischen Geschlossenheit', d. h. die strikte Trennung von Objekt- und Metasprache (23), die weiter eine Metametasprache usw. und damit einen unendlichen Progreß von Metasprachen höherer Ordnung involviert. Der an sich bekannte Sachverhalt braucht hier nicht näher entwickelt zu werden. Von Interesse ist im vorliegenden Zusammenhang indessen der Umstand, daß jene Sprachstufung mit der Konsequenz semantisch offener Sprachen ersichtlich die genaue Parallele zur GÖDELSchen Unvollständigkeit darstellt: Dieser Unvollständigkeit, die auch durch exzessive Erweiterungen der formalen Möglichkeiten prinzipiell nicht behebbar ist, steht dort die unabschließbare Hierarchie von Metasprachen immer höherer Ordnung gegenüber. Vermeidbar wird der damit verbundene unendliche Progreß offenbar nur durch Rückkehr zu einer semantisch geschlossenen Struktur, in der die Trennung von Objekt- und Metasprache rückgängig gemacht ist, objekt- und metasprachliche Terme also grundsätzlich gleichgestellt sind. Freilich: Bedeutet das nicht, daß die Wahrheitsantinomie, um derentwillen die semantische Geschlossenheit der Sprache ja geopfert worden war, damit erneut möglich wird? Meine Antwort ist nein. Gerade die Zulässigkeit objekt- und metasprachlich 'gemischter' Ausdrücke bietet, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe (24), auch die Möglichkeit einer nicht-restriktiven Lösung des Antinomienproblems, insbesondere der Wahr-

heitsantinomie, indem verlangt wird, daß der auch im antinomischen Satz noch enthaltene Wahrheitsanspruch explizit mitformuliert wird. Der ausdrückliche Rückgang auf den Wahrheitsbegriff ist hierbei entscheidend.

Wenn es zutrifft, daß Logik im Wahrheitsbegriff ihre Basis besitzt, braucht sie den Vorwurf der Unabschließbarkeit, der sich im GÖDELSchen Unvollständigkeitstheorem ebenso wie im unendlichen Progreß der Metasprachenhierarchie artikuliert, nicht hinzunehmen. Sprachstufung und formale Unvollständigkeit sind nicht das letzte Wort. Eben dadurch, daß der Wahrheitsbegriff ausdrücklich als solcher zur Geltung gebracht wird, kann Logik vielmehr auch formal als selbsttragendes, in sich geschlossenes System in Erscheinung treten.

Anmerkungen

- 1 Vgl. D. WANDSCHNEIDER, Formale Sprache und Erfahrung. Carnap als Modellfall. Stuttgart 1975.
- 2 F. v. KUTSCHERA, Die Antinomien der Logik. Freiburg, München 1964. S. 84ff.
- 3 K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme - Einleitung, abgedruckt in: O. BIECKER, Grundlagen der Mathematik. Frankfurt/M. 1975.
- 4 W. STEGMÜLLER, Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit. Wien, New York 1973³. S. 10.
- 5 Eine bemerkenswerte Ausnahme stellt v. KUTSCHERAs Arbeit über 'Die Antinomien der Logik' dar, deren Verdienst es ist, die mit der Reflexivität von G verbundene 'semantische Zirkularität', wie v. KUTSCHERA den Tatbestand charakterisiert, eindeutig herausgestellt und als eigentlichen Grund der Unentscheidbarkeit von G erkannt zu haben. Daß hier unter konstruktivistischen Vorzeichen darüberhinaus die Rechtmäßigkeit der GÖDELSchen Konstruktion angezweifelt wird, erscheint demgegenüber nicht als zwingende Konsequenz.
- 6 Vgl. Anm. 5.
- 7 Daß hierdurch andere Fragestellungen der Beweistheorie angeregt und wesentlich gefördert worden sind, soll dabei nicht in Abrede gestellt werden.
- 8 Der also entweder keine Unbeweisbarkeitsaussage enthält oder, wenn doch, dann keine reflexive.
- 9 Vorausgesetzt ist hierbei lediglich die Verträglichkeit mit den übrigen Axiomen, d.h. die Negation des Satzes darf nicht aus diesen logisch folgen.
- 10 Vgl. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica.
- 11 G. FREY, Sprache - Ausdruck des Bewußtseins. Stuttgart 1965. S. 37ff.
- 12 FREY, S. 42.
- 13 "Jene formale Unvollständigkeit von S beruht darauf, daß die Metasprache M, in der die metamathematischen Aussagen über S ausgesprochen werden, durch jenen Trick der Arithmetisierung in S selbst formulierbar sind". (FREY, S. 41) Vgl. hierzu auch W. STEGMÜLLER, Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik. Wien, New York 1968². S. 98.

- 14 FREY, S. 43ff.
- 15 Vgl. G. FREY, Die Mathematisierung unserer Welt. Stuttgart, Berlin, Köln, Mainz 1968. Ders., Können Maschinen Bewußtsein haben?, in: n + m. Naturwissenschaft und Medizin. Bd. 24(1968), S. 3-9. Ders., Erkenntnis der Wirklichkeit.
- 16 Vgl. J.R. LUCAS, Minds, Machines and GÖDEL, in: A.R. ANDERSON (ed.), Minds and Machines. Englewood Cliffs, New Jersey 1964. S. 43-59: The GÖDELian formula "cannot be proved-in-the-system. Therefore the machine cannot produce the formula as being true. But we can see that the GÖDELian Formula is true ... For every machine there is a truth which it cannot produce as being true, but which a mind can. This shows that a machine cannot be a complete and adequate model of the mind ... We cannot build a machine to simulate every piece of mind-like behavior ... However good the machine is, and however much better it can do in nearly all respects than a human mind can, it always has this one weakness, this one thing which it cannot do, whereas a mind can. The GÖDELian formula is the Achilles' heel of the cybernetical machine ... We can never, not even in principle, have a mechanical model of the mind". (47) "Thanks to GÖDEL's theorem, the mind always has the last word". (48)
- 17 In meiner Dissertation 'Formale Sprache und Erfahrung' (vgl. Anm. 1) habe ich selbst in diesem Sinne argumentiert. Der im folgenden zu entwickelnde Gedanke scheint mir den entscheidenden Punkt besser zu treffen.
- 18 F. WAISMANN, Logik, Sprache, Philosophie. Stuttgart 1976. S. 555.
- 19 Dem entspricht die Praxis, den Widerspruchsfreiheitsbeweis für ein Axiomensystem dadurch zu führen, daß eine mögliche Interpretation der Axiome, ein 'Modell' derselben, angegeben wird. Das System ist dann erfüllbar: Diese Möglichkeit einer konsistenten Verwendung der Grundzeichen in den Axiomen bezeugt deren Verträglichkeit untereinander.
- 20 Vgl. hierzu QUINEs Statement: "Jeder Versuch, die Gültigkeit oder logische Wahrheit mit Hilfe eines Beweisverfahrens zu definieren, pflegt Protest auszulösen. Man weist darauf hin, daß die Eigenschaft, durch eine bestimmte Beweis-methode beweisbar zu sein, an sich uninteressant sei". Es ist klar, welchen Grund dies hat: "die Willkür in der Wahl eines Beweisverfahrens". (QUINE, Philosophie der Logik. Stuttgart 1973. S. 68). Vgl. ferner STEGMÜLLER, Wahrheitsproblem, S. 252.
- 21 Vgl. hierzu auch die an früherer Stelle schon angedeuteten Merkwürdigkeiten im Zusammenhang mit Sätzen wie: 'Dieser Satz ist noch nicht (nicht mehr) beweisbar'.
- 22 Auf die Parallele von Wahrheitsantinomie und Unvollständigkeitstheorem weist bereits GÖDEL hin. Vgl. ferner etwa auch QUINE, The Ways of Paradox.
- 23 Vgl. hierzu auch W. STEGMÜLLER, Wahrheitsproblem.
- 24 D. WANDSCHNEIDER, Zum Antinomienproblem der Logik, in: RATIO, Bd. 16 (1974), S. 74-91.